

Cours – Séquence n° 8 – FONCTIONS (III) : continuité, TVI

I- LANGAGE DE LA CONTINUITÉ



Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 - 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

Définitions

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I .

1. Dire que f est **continue en a** signifie que f a une limite en a égale à $f(a)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
2. Dire que f est **continue sur I** signifie que f est continue en tout nombre réel a de I .

Remarques

1. Une fonction non continue en a est dite **discontinue** en a .
2. Définition intuitive : reconnaissance graphique d'une fonction continue ou pas sur un intervalle.
En pratique, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative de f peut se tracer sur I **sans lever le crayon**.

Exemples

OUI : f est continue en a	NON : f n'est pas continue en a
Dans tous les cas : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ Donc f est continue en a	f n'est pas définie en a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ car $f(a)$ n'existe pas donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ n'existe pas Donc f n'est pas continue en a

Propriétés (admisses)

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I .

1. Si une fonction f est dérivable en a , alors f est continue en a .
2. Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I , alors f est continue sur I .

Remarque ☞ Les réciproques sont fausses.

En effet, la fonction *racine carrée* est continue sur $[0 ; +\infty[$, mais elle est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Propriétés (conséquences) : continuité des fonctions usuelles

1. Les fonctions polynômes (affine, trinôme, cube...) sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction racine carrée est continue sur $[0 ; +\infty[$.
3. La fonction inverse est continue sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$.
4. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Les fonctions construites par opérations (somme, produit, quotient) ou par composition à partir des précédentes sont continues sur les intervalles qui forment leur ensemble de définition.
En particulier les fonctions rationnelles (quotient de polynômes) sont continues sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.

Exemple 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, par $f(x) = \frac{4e^x + 1}{x - 5}$. f est-elle continue sur $]5 ; +\infty[$?

f est continue sur $]5 ; +\infty[$ car quotient de fonctions continues sur $]5 ; +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle.

Exemple 2

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-4}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$. g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Conjecture: La fonction g semble continue sur $\mathbb{R}$ (graphiquement).

Sur $] -\infty ; 1[$ g est continue car fonction polynôme définie sur $] -\infty ; 1[$.

Sur $] 1 ; +\infty[$ g est continue car fonction rationnelle définie sur $] 1 ; +\infty[$.

En 1, a-t-on $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$?

$$\begin{array}{l|l} \text{On } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 - 2x - 2) & \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left(\frac{x-4}{x} \right) \\ \hline = -3 & = -3 \end{array}$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x). \text{ Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} g(x) = -3$$

$$\text{On } g(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 2 = -3 \quad \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) \quad \text{Donc } g \text{ est continue en 1}$$

Donc g est continue sur $\mathbb{R}$ (conjecture vérifiée) !!

Exemple 3

h est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^2}, & \text{si } 0 < x < 2 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. Étudier la continuité de h sur $]0; +\infty[$.

Conjecture : La fonction h ne semble pas continue sur $]0; +\infty[$ car elle ne semble pas continue en 2 (graphiquement)

En 2, a-t-on, $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2)$?

$$\text{Or, } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{x^2} = 2 \quad \Bigg| \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \geq 2}} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} h(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \geq 2}} h(x)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ n'existe pas, donc h n'est pas continue en 2.

Donc h n'est pas continue sur $]0; +\infty[$

(Conjecture validée) !!

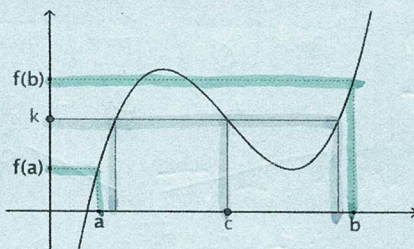
II- THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Théorème (admis) : théorème des valeurs intermédiaires

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que : $f(c) = k$.

Illustration graphique



Ci-contre, $f(x) = k$ admet par exemple c comme solution.

Remarques

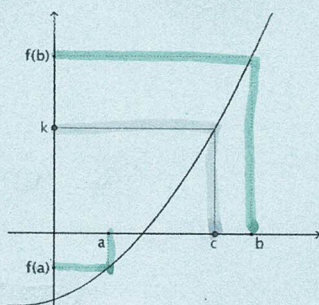
1. La droite d'équation $y = k$ coupe la courbe de f en au moins un point d'abscisse c comprise entre a et b .
2. Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer l'**existence** d'une ou de plusieurs solutions à une équation, mais il ne permet pas de déterminer les valeurs de ces solutions. Des méthodes algorithmiques permettent d'obtenir des valeurs approchées de ces solutions.

Propriété (conséquence) : corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** dans l'intervalle $[a ; b]$.

Illustration graphique



Ci-contre, f est continue et strictement croissante sur I .
 $f(x) = k$ admet c comme unique solution.

Démonstration

- Cas où f est continue et strictement croissante sur $[a ; b]$.

Comme f est continue sur $[a ; b]$, d'après le TVI, il existe au moins un réel c de $[a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Or, f est strictement croissante sur $[a ; b]$, donc :

- si $x \in [a ; b]$ tel que $x < c$, alors $f(x) < f(c)$, c'est-à-dire $f(x) < k$
- si $x \in [a ; b]$ tel que $x > c$, alors $f(x) > f(c)$, c'est-à-dire $f(x) > k$

Donc c est l'unique réel de $[a ; b]$ solution de l'équation $f(x) = k$.

- Cas où f est continue et strictement décroissante sur $[a ; b]$: démonstration analogue.

Remarques

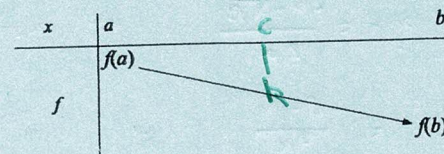
1. Cette propriété s'étend à des intervalles du type : $]a ; b]$; $[a ; b[$; $]a ; b[$; $]-\infty ; a]$; $]-\infty ; a[$; $[a ; +\infty[$; $]a ; +\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$ en utilisant les limites de ces fonctions.
2. Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variations indiquent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Exemple 1

On considère une fonction f dont on donne le tableau de variations ci-contre.

Soit k un réel de l'intervalle $[f(b); f(a)]$

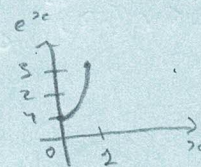
Selon le tableau de variations, la fonction f est :



- continue sur $[a; b]$
- strictement décroissante sur $[a; b]$
- $k \in [f(b); f(a)]$

Alors, d'après le corollaire du TVI,

l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique, $c \in [a; b]$

**Exemple 2**

L'équation $e^x = 2$ admet une unique solution sur $[0; 1]$.

En effet, la fonction exponentielle est :

- continue sur $[0; 1]$
- strictement croissante sur $[0; 1]$
- $2 \in [1; e]$

Alors, d'après le corollaire du TVI,

l'équation $e^x = 2$ admet une solution unique, $c \in [0; 1]$

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$.

1. a. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.
b. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de chacune de ces solutions.
2. a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 5$ sur $\mathbb{R}$.
b. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au centième de la (des) solution(s).

1) a) Etude de la variation de f sur $\mathbb{R}$:

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$

• $f'(x)$ est un polynôme avec $a=3$, $b=8$ et $c=4$

$$\Delta b^2 - 4ac$$

$$= 64 - 4 \times 3 \times 4$$

$$= 64 - 48$$

$$= 16 > 0$$

Soit $\mathbb{Q}$ polynôme admet 2 racines réelles.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$= \frac{-8 - 6}{2 \times 1}$$

$$= -2$$

$$= \frac{-8 + 6}{2 \times 1}$$

$$= -\frac{2}{2}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
variation de f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$$\begin{aligned} \bullet f(-2) &= (-2)^3 + 6x(-2)^2 + 6x(-2)^2 \\ &= -8 + 6 \times 4 - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2}{3}\right) &= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 6 \times \frac{4}{9} - \frac{8}{3} \\ &= -\frac{8}{27} + 6 \times \frac{4}{9} - \frac{8}{3} \\ &= \frac{-8 + 68 - 72}{27} \\ &= \frac{-12}{27} \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 6x^2 + 6x)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^2 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 6x &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc, par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 6x^2 + 6x) \quad f_i$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{6}{x} + \frac{6}{x^2}\right)$$

$$Q_2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x^2} = 0 \quad \text{donc, par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{6}{x} + \frac{6}{x^2}\right) = 1$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{donc, par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• Sur $] -\infty; -2]$, f est continue (car dérivable)

et strictement croissante.

$$\text{De plus, } -1 \in] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(-2)]$$

Alors, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique

$$\alpha \in]-\infty; -2]$$

• Sur $] -2; -\frac{2}{3}]$ f est continue (car dérivable) et strictement décroissante.

$$\exists \text{ p.l.m. } -1 \in]f(-\frac{2}{3}); f(-2)[$$

Alors, d'après le corollaire de TVI, l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique

$$\beta \in] -2; -\frac{2}{3}]$$

• Sur $] -\frac{2}{3}; +\infty[$ f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

$$\exists \text{ p.l.m. } -1 \in]f(-\frac{2}{3}); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

Alors, d'après le corollaire de TVI, l'équation $f(x) = -1$ admet une solution unique

$$\gamma \in] -\frac{2}{3}; +\infty[$$

Conclusion: l'équation $f(x) = -1$ admet bien ^{exactement} 3 solutions sur $\mathbb{R}$.

1) b)